

A.M.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ
!!! μόνον άρτιοι !!!			

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1
ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ Α.Μ.
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΟΥΝΙΟΥ
09 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

1. (20%) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\sin x - \sin \xi - \xi x + \xi^2}{x - \xi} = 0.$$

2. (20%) Έστω $a < c < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, με τις ιδιότητες

- (i) η f' είναι συνεχής στο $[a, b]$,
- (ii) η f' είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) ,
- (iii) ισχύει η σχέση

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

3. (20%) Ας είναι $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη και περιοδική, με περίοδο T , συνάρτηση. Δείξτε ότι η f' είναι περιοδική με περίοδο T .

4. (20%) Ας είναι $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις, με τις ιδιότητες

- (i) $f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά,
- (ii) η g είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της,
- (iii) $f \circ g = g \circ f$.

Δείξτε ότι η g' είναι περιοδική, με περίοδο a .

5. (20%) Ας είναι $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας, μια παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της συνάρτηση, τέτοια ώστε η παράγωγος της να μηδενίζεται σε ολόκληρο το διάστημα I εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I .